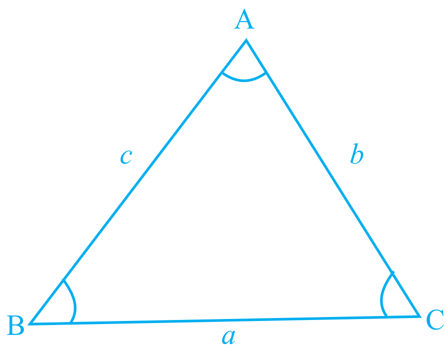
पूरक पाठ्य सामग्री

अध्याय 3

3.6. साइन (sine) और कोसाइन (cosine) सूत्रों की उपपत्तियाँ तथा उनके कुछ सरल अनुप्रयोग

मान लीजिए कि ABC एक त्रिभुज है। कोण A से हमारा तात्पर्य है कि भुजाओं AB और AC से बना कोण, जो 0° और 180° के बीच में स्थित है। कोणों B और C को भी इस प्रकार परिभाषित किया जाता है। शीर्षों C, A और B की सम्मुख भुजाओं को क्रमशः c, a और b से व्यक्त किया जाएगा (देखिए आकृति 3.15)।

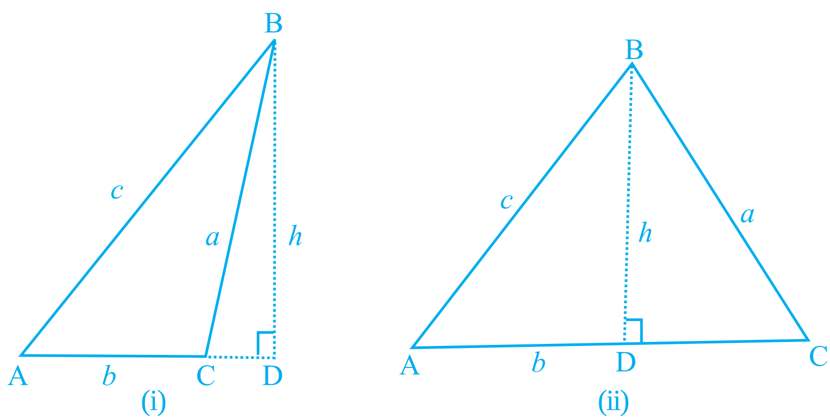


आकृति 3.15

प्रमेय 1 (साइन सूत्र) किसी भी त्रिभुज में, भुजाएँ सम्मुख कोणों के साइनों (sines) के समानुपाती होती हैं। अर्थात् एक त्रिभुज ABC में,

$$\frac{\sin A}{a} \quad \frac{\sin B}{b} \quad \frac{\sin C}{c}$$

उपपत्ति मान लीजिए कि आकृति 3.16 (i) और (ii) में दर्शाए दोनों त्रिभुजों में से प्रत्येक ΔABC है।



आकृति 3.16

शीर्ष B से शीर्षलंब h खींचा गया है, जो भुजा AC के बिंदु D पर मिलता है [(i) में AC को शीर्षलंब से मिलने के लिए बढ़ाया गया है]। आकृति 3.16(i) में समकोण त्रिभुज ABC से, हमें प्राप्त होता है–

$$\sin A = \frac{h}{c}, \text{ अर्थात् } h = c \sin A \qquad (1)$$

तथा $$\sin(180° - C) = \frac{h}{a} \quad h \quad a \sin C \qquad (2)$$

(1) और (2) से, हमें प्राप्त होता है–

$$c \sin A = a \sin C, \text{ अर्थात् } \frac{\sin A}{a} = \frac{\sin C}{c} \qquad (3)$$

इसी प्रकार, हम सिद्ध कर सकते हैं कि

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} \qquad (4)$$

(3) और (4) से, हम प्राप्त करते हैं–

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} \quad \frac{\sin C}{c}$$

आकृति 3.16 (ii) के त्रिभुज ABC के लिए, समीकरण (3) और (4) इसी प्रकार प्राप्त होते हैं।

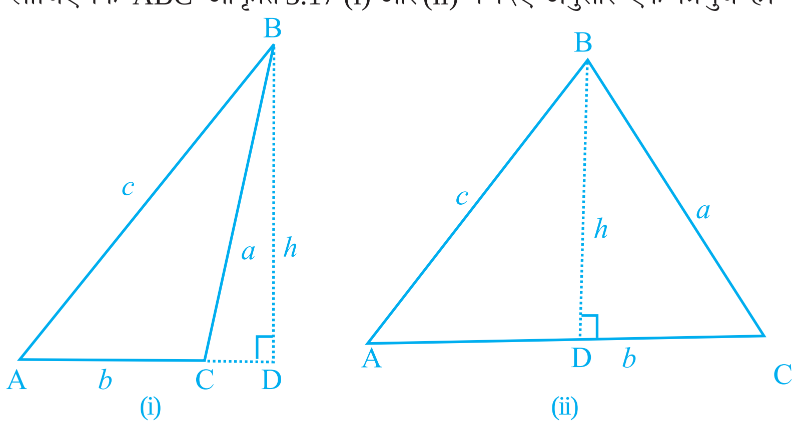
प्रमेय 2 (कोसाइन सूत्र) मान लीजिए कि A, B और C किसी त्रिभुज ABC के कोण हैं तथा a, b और c क्रमशः कोणों A, B और C की सम्मुख भुजाओं की लंबाइयाँ हैं। तब,

$$a^2 \quad b^2 \quad c^2 \quad 2bc \cos A$$

$$b^2 \quad c^2 \quad a^2 \quad 2ca \cos B$$

$$c^2 \quad a^2 \quad b^2 \quad 2ab \cos C$$

उपपत्ति मान लीजिए कि ABC आकृति 3.17 (i) और (ii) में दिए अनुसार एक त्रिभुज है।



आकृति 3.17

आकृति 3.17 (ii) के संदर्भ में, हम प्राप्त करते हैं–

$$\mathrm{BC}^2 \quad \mathrm{BD}^2 \quad \mathrm{DC}^2 \quad \mathrm{BD}^2 \quad (\mathrm{AC} \quad \mathrm{AD})^2$$

$$\mathrm{BD}^2 \quad \mathrm{AD}^2 \quad \mathrm{AC}^2 \quad 2\mathrm{AC.AD}$$

$$\mathrm{AB}^2 \quad \mathrm{AC}^2 \quad 2\mathrm{AC\,AB}\cos\mathrm{A}$$

या $$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\mathrm{A}$$

इसी प्रकार, हम प्राप्त कर सकते हैं कि

$$b^2 = c^2 \quad a^2 \quad 2ca\cos\mathrm{B}$$

और $$c^2 = a^2 \quad b^2 \quad 2ab\cos\mathrm{C}$$

इसी प्रकार की समीकरण, हम आकृति 3.17 (i) के लिए भी प्राप्त कर सकते है, जहाँ C एक अधिक कोण है। जब कोणों को ज्ञात करना हो, तो कोसाइन सूत्रों के सुविधाजनक सूत्र नीचे दिए जा रहे हैं–

$$\cos \mathrm{A} = \frac{b^2 \quad c^2 \quad a^2}{2bc}$$

$$\cos \mathrm{B} = \frac{c^2 \quad a^2 \quad b^2}{2ac}$$

$$\cos \mathrm{C} = \frac{a^2 \quad b^2 \quad c^2}{2ab}$$

उदाहरण 25 त्रिभुज ABC में, सिद्ध कीजिए कि

$$\tan\frac{\mathrm{B} \quad \mathrm{C}}{2} \quad \frac{b \quad c}{b \quad c}\cot\frac{\mathrm{A}}{2}$$

$$\tan\frac{\mathrm{C} \quad \mathrm{A}}{2} \quad \frac{c \quad a}{c \quad a}\cot\frac{\mathrm{B}}{2}$$

$$\tan\frac{\mathrm{A} \quad \mathrm{B}}{2} \quad \frac{a \quad b}{a \quad b}\cot\frac{\mathrm{C}}{2}$$

हल साइन सूत्र से, हमें प्राप्त होता है–

$$\frac{a}{\sin\mathrm{A}} = \frac{b}{\sin\mathrm{B}} \quad \frac{c}{\sin\mathrm{C}} \quad k \quad \text{(मान लीजिए)}$$

अतः, $$\frac{b \quad c}{b \quad c} = \frac{k(\sin\mathrm{B} \quad \sin\mathrm{C})}{k(\sin\mathrm{B} \quad \sin\mathrm{C})}$$

$$= \frac{2\cos\frac{B\quad C}{2}\sin\frac{B\quad C}{2}}{2\sin\frac{B\quad C}{2}\cos\frac{B\quad C}{2}}$$

$$= \cot\frac{(B+C)}{2}\tan\frac{(B-C)}{2}$$

$$= \cot\quad \frac{}{2}\quad\frac{A}{2}\quad\tan\quad\frac{B-C}{2}$$

$$= \frac{\tan\frac{B-C}{2}}{\cot\frac{A}{2}}$$

अतः $\qquad \tan\frac{B-C}{2} = \frac{b\quad c}{b\quad c}\cot\frac{A}{2}$

इसी प्रकार, हम अन्य परिणामों को सिद्ध कर सकते हैं। इन परिणामों को नेपियर की अनुपात (Napier's Analogies) के रूप में जाना जाता है।

उदाहरण 26 किसी त्रिभुज ABC में, सिद्ध कीजिए कि

a sin (B – C) + b sin (C – A) + C sin (A – B) = 0 होता है।

हल आप जानते हैं कि

a sin (B – C) = a [sinB cosC – cosB sinC] (1)

अब, $\qquad \frac{\sin A}{a} \quad \frac{\sin B}{b} \quad \frac{\sin C}{c} \quad k \qquad$ (मान लीजिए)

अतः, sin A = ak, sin B = bk, sin C = ck

(1) में, sinB और sinC के मान रखकर कोसाइन सूत्र के प्रयोग द्वारा, हम प्राप्त करते हैं–

$$a\sin(B\quad C) = a\left[bk\left(\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\right)-ck\left(\frac{c^2+a^2-b^2}{2ac}\right)\right]$$

$$= \frac{k}{2}\quad a^2\quad b^2\quad c^2\quad c^2\quad a^2\quad b^2$$

$$= k(b^2\quad c^2)$$

इसी प्रकार, $\qquad b$ sin (C – A) = k (c^2 – a^2)

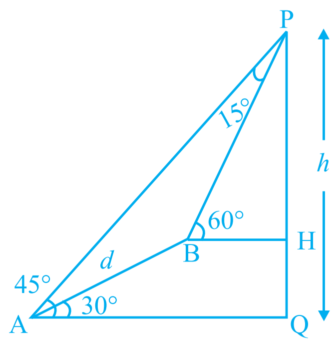
और $$c\sin(A - B) = k\,(a^2 - b^2)$$

अतः $$\text{L.H.S} = k\,(b^2 - c^2 + c^2 - a^2 + a^2 - b^2)$$
$$= 0 = \text{R.H.S.}$$

उदाहरण 27 उँचाई h वाली किसी उर्ध्वाधर मीनार PQ के शीर्ष बिंदु P का एक बिंदु A से उन्नयन कोण 45° है तथा बिंदु B से उन्नयन कोण 60° है, जहाँ B बिंदु A से दूरी d पर स्थित है, जिसे रेखा AB के अनुदिश मापा गया है, जो AQ के साथ 30° का कोण बनाती है। सिद्ध कीजिए कि $d = h(\sqrt{3} - 1)$ है।

हल आकृति 3.18 से, हमें प्राप्त है–

$\angle PAQ = 45°, \angle BAQ = 30°, \angle PBH = 60°$



आकृति 3.18

स्पष्टतः APQ 45 , BPH 30 , जिससे APB 15 प्राप्त होता है।

पुनः, $$\angle PAB = 15° \Rightarrow \angle ABP = 150°$$

त्रिभुज APQ से, हमें प्राप्त होता है–

$$AP^2 = h^2 + h^2 = 2h^2 \text{ (क्यों ?)}$$

या $$AP = \sqrt{2}h$$

Δ ABP में, साइन सूत्र का प्रयोग करने पर, हमें प्राप्त होता है–

$$\frac{AB}{\sin 15} = \frac{AP}{\sin 150} \quad \frac{d}{\sin 15} \quad \frac{\sqrt{2}h}{\sin 150}$$

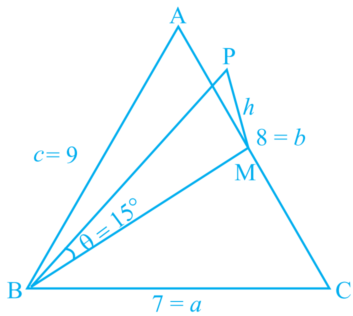
अर्थात्, $$d = \frac{\sqrt{2}h\sin 15}{\sin 30}$$

$$= h(\sqrt{3} \quad 1) \text{ (क्यों ?)}$$

उदाहरण 28 एक लेम्प-पोस्ट किसी त्रिभुजाकार भूखंड ABC की भुजा AC के मध्य-बिंदु M पर स्थित है, जिसमें BC = 7m, CA = 8m और AB = 9 m है। यह लेम्प पोस्ट बिंदु B पर 15° का कोण अंतरित करता है। लैम्प पोस्ट की उँचाई निर्धारित कीजिए।

आकृति 3.19 से, हम प्राप्त करते हैं–

AB = 9 = *c*, BC = 7 = *a* और AC = 8 = *b*.



आकृति 3.19

M भुजा AC का मध्य-बिंदु है, जिस पर उँचाई *h* (मान लीजिए) का लेम्प पोस्ट स्थित है। पुनः यह भी दिया गया है कि लेम्प पोस्ट बिंदु B पर कोण θ (मान लीजिए) अंतरित करता है, जो 15° के बराबर है।

ΔABC में, कोसाइन सूत्र का प्रयोग करने पर, हम प्राप्त करते हैं;

$$\cos C = \frac{a^2 \quad b^2 \quad c^2}{2ab} \quad \frac{49 \quad 64 \quad 81}{2 \quad 7 \quad 8} \quad \frac{2}{7} \qquad (1)$$

इसी प्रकार, ΔBMC में कोसाइन सूत्र का प्रयोग करने पर, हम प्राप्त करते हैं–

$$BM^2 = BC^2 + CM^2 - 2\, BC \times CM \cos C.$$

यहाँ, $CM = \frac{1}{2} CA = 4$, क्योंकि M भुजा AC का मध्य-बिंदु है।

इसलिए, (1) का प्रयोग करने पर, हमें प्राप्त होता है–

$$BM^2 = 49 + 16 - 2 \times 7 \times 4 \times \frac{2}{7}$$

$$= 49$$

या $$BM = 7$$

अतः, ΔBMP जिसका बिंदु M पर कोण समकोण है, से, हमें प्राप्त होता है–

$$\tan \quad = \frac{PM}{BM} \quad \frac{h}{7}$$

या $$\frac{h}{7} = \tan(15\ ) = 2 \quad \sqrt{3}$$ (क्यों ?)

या $$h = 7(2 \quad \sqrt{3})\,m.$$

प्रश्नावली 3.5

किसी त्रिभुज ABC में, यदि $a = 18$, $b = 24$, और $c = 30$ है। तो प्राप्त कीजिए–

1. cosA, cosB, cosC (उत्तर $\frac{4}{5}, \frac{3}{5}, 0$)

2. sinA, sinB, sinC (उत्तर $\frac{3}{5}, \frac{4}{5}, 1$)

किसी त्रिभुज ABC के लिए, सिद्ध कीजिए कि–

3. $\frac{a\quad b}{c} \quad \frac{\cos\frac{A\quad B}{2}}{\sin\frac{C}{2}}$

4. $\frac{a\quad b}{c} \quad \frac{\sin\frac{A\quad B}{2}}{\cos\frac{C}{2}}$

5. $\sin\frac{B-C}{2} = \frac{b-c}{a}\cos\frac{A}{2}$

6. $a\,(b\cos C - c\cos B) = b^2 - c^2$

7. $a\,(\cos C - \cos B) = 2\,(b - c)\cos^2\frac{A}{2}$

8. $\frac{\sin(B-C)}{\sin(B+C)} \quad \frac{b^2\quad c^2}{a^2}$

9. $(b\quad c)\cos\frac{B\quad C}{2} \quad a\cos\frac{B\quad C}{2}$

10. $a\cos A \quad b\cos B \quad c\cos C \quad 2a\sin B\sin C$

11. $\frac{\cos A}{a} \quad \frac{\cos B}{b} \quad \frac{\cos C}{c} \quad \frac{a^2\quad b^2\quad c^2}{2abc}$

12. $(b^2 - c^2)\cot A + (c^2 - a^2)\cot B + (a^2 - b^2)\cot C = 0$

13. $\frac{b^2\quad c^2}{a^2}\sin 2A \quad \frac{c^2\quad a^2}{b^2}\sin 2B \quad \frac{a^2\quad b^2}{c^2}\sin 2C \quad 0$

14. एक पहाड़ी क्षैतिज से 15° कोण बनाती है। इस पहाड़ी पर एक पेड़ उर्ध्वाधर खड़ा हुआ है। पहाड़ी की ढाल के अनुदिश 35 m की दूरी भूमि पर स्थित किसी बिंदु से, पेड़ के शिखर का उन्नयन कोण 60° है। पेड़ की ऊँचाई ज्ञात कीजिए। (उत्तर $35\sqrt{2}$ m)

15. दो जहाज एक ही समय पर, किसी बंदरगाह से चलते हैं। एक 24 km प्रति घंटा की चाल से N45°E दिशा में चलता है तथा दूसरा 32 km प्रति घंटा की चाल से S75°E की दिशा में चलता है। 3 घंटे के पश्चात् दोनों जहाजों की दूरी ज्ञात कीजिए।

(उत्तर 86.4 km (लगभग))

16. दो पेड़ A और B एक नदी के एक ही ओर खड़े हैं। नदी के अंदर किसी बिंदु C से पेड़ों A और B की दूरियाँ क्रमशः 250 m और 300 m हैं। यदि कोण C, 45° के बराबर है, तो पेड़ो के बीच की दूरी ज्ञात कीजिए। ($\sqrt{2}$ = 1.44 का प्रयोग कीजिए) (उत्तर 215.5 m)

अध्याय 5

5.7. एक सम्मिश्र संख्या का वर्गमूल

हम पाठ्यपुस्तक के पृष्ठों 108–109 पर सम्मिश्र मूलों से संबद्ध द्विघात समीकरणों के हल करने की चर्चा कर चुके हैं। यहाँ हम मानक रूप में व्यक्त किसी सम्मिश्र संख्या के वर्गमूल ज्ञात करने की विशिष्ट विधि को स्पष्ट करेंगे। हम एक उदाहरण द्वारा इसे स्पष्ट करेंगे।

उदाहरण 12 $-7-24i$ के वर्गमूल ज्ञात कीजिए।

हल मान लीजिए कि $x \quad iy \quad \sqrt{7 \quad 24i}$ है।

तब, $(x+iy)^2 = -7-24i$

या $x^2 - y^2 + 2xyi = -7-24i$

वास्तविक और काल्पनिक भागों को बराबर करने पर, हमें प्राप्त होता है–

$x^2 - y^2 = -7$ (1)

$2xy = -24$

सर्वसमिका $x^2 \quad y^2 \; ^2 \quad x^2 \quad y^2 \; ^2 \quad (2xy)^2$ से,

$(x^2 + y^2) = 49 + 576 = 625$

अतः, $x^2 + y^2 = 25$ (2)

(1) और (2) से, $x^2 = 9$ और $y^2 = 16$ प्राप्त होता है।

या $x = \pm 3$ और $y = \pm 4$

क्योंकि गुणनफल xy ऋणात्मक है, इसलिए हमें प्राप्त होता है–

$x = 3, y = -4$ or, $x = -3, y = 4$

अतः, $-7-24i$ के वर्गमूल $3-4i$ और $-3+4i$ हैं।

प्रश्नावली 5.4

निम्नलिखित संख्याओं का वर्गमूल ज्ञात कीजिए–

1 $-15-8i$ (उत्तर $1-4i, -1+4i$)

2. $-8-6i$ (उत्तर $1-3i, -1+3i$)

3. $1-i$ (उत्तर $\left(\pm\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2}} \mp \sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}\,i\right)$)

4. $-i$ (उत्तर $\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}} \mp \frac{1}{\sqrt{2}}\,i\right)$)

5. i (उत्तर $\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\pm\frac{1}{\sqrt{2}}i\right)$) **6.** $1+i$ (उत्तर $\left(\pm\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2}}\pm\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}i\right)$)

अध्याय 9

9.7. अपरिमित G.P. और उसका योग

$a, ar, ar^2, ar^3, \ldots$ के प्रकार की G.P. एक अपरिमित (infinite) G.P. कहलाती है। अब, एक अपरिमित G.P. के योग का सूत्र ज्ञात करने के लिए, हम एक उदाहरण से प्रारंभ करते हैं। आइए निम्न G.P. पर विचार करें–

$$1, \frac{2}{3}, \frac{4}{9}, \ldots$$

यहाँ $a = 1,\ r \quad \frac{2}{3}$ है। हमें प्राप्त होता है–

$$S_n = \frac{1 \quad \frac{2}{3}^{n}}{1 \quad \frac{2}{3}} \quad 3\ 1 \quad \frac{2}{3}^{n}$$

जैसे-जैसे n बड़ा होता जाता है, आइए देखें कि $\frac{2}{3}^{n}$ का क्या व्यवहार रहता है।

n	1	5	10	20
$\frac{2}{3}^{n}$	0.6667	0.1316872428	0.01734152992	0.00030072866

हम देखते हैं कि जैसे-जैसे n बड़ा होता जाता है, $\frac{2}{3}^{n}$ शून्य के निकटतर और अधिकतर निकटतर होता जाता है। गणितीय रूप से, हम कहते हैं कि जैसे n पर्याप्त रूप से बड़ा हो जाता है।, वैसे ही $\frac{2}{3}^{n}$ पर्याप्त रूप से छोटा हो जाता है। दूसरे शब्दों में, जब $n \to \infty, \left(\frac{2}{3}\right)^{n} \to 0$ होता है। इसके परिणाम स्वरूप, हम ज्ञात करते हैं कि अपरिमित रूप से अनेक पदों का योग $S \quad 3$ है।

अब, एक गुणोत्तर श्रेढ़ी $a, ar, ar^2, \ldots,$ के लिए, यदि सार्वअनुपात r का संख्यात्मक मान 1 से छोटा है, तो

$$S_n = \frac{a(1 \quad r^n)}{(1 \quad r)} \quad \frac{a}{1 \quad r} \quad \frac{ar^n}{1 \quad r}$$

इस स्थिति में, जब n , $r^n \to 0$ है, क्योंकि $|r| < 1$ है। अतः,

$$S_n \quad \frac{a}{1 \quad r}$$

सांकेतिक रूप से, अपरिमित पदों के योग को S या S से व्यक्त किया जाता है।

इस प्रकार, हमें S $\frac{a}{1-r}$ प्राप्त होता है।

उदाहरणार्थ, (i) $1 \quad \frac{1}{2} \quad \frac{1}{2^2} \quad \frac{1}{2^3} \quad ... \quad \frac{1}{1 \quad \frac{1}{2}} \quad 2.$

(ii) $1 \quad \frac{1}{2} \quad \frac{1}{2^2} \quad \frac{1}{2^3} \quad ... \quad \frac{1}{1 \quad \frac{1}{2}} \quad \frac{1}{1 \quad \frac{1}{2}} \quad \frac{2}{3}$

प्रश्नावली 9.4

निम्न गुणोत्तर श्रेढ़ियों के अपरिमित पदों तक योग ज्ञात कीजिए–

1. $1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, ...$ (उत्तर 1.5)

2. 6, 1.2, .24, ... (उत्तर 7.5)

3. $5, \frac{20}{7}, \frac{80}{49}, ...$ (उत्तर $\frac{35}{3}$)

4. $\frac{3}{4}, \frac{3}{16}, \frac{3}{64}, ...$ (उत्तर $\frac{3}{5}$)

5. सिद्ध कीजिए कि $3^{\frac{1}{2}} \quad 3^{\frac{1}{4}} \quad 3^{\frac{1}{8}} ... \quad 3$ है।

6. मान लीजिए कि $x = 1 + a + a^2 + ...$ और $y = 1 + b + b^2 + ...$, जहाँ $|a| < 1$ और $|b| < 1$ है। सिद्ध कीजिए कि

$$1 + ab + a^2b^2 + ... = \frac{xy}{x \quad y \quad 1}$$

अध्याय 10

10.6 दो रेखाओं के प्रतिच्छेद बिंदु से होकर जाने वाली रेखाओं के कुल (परिवार) की समीकरण

मान लीजिए कि दो प्रतिच्छेदी रेखाओं l_1 और l_2 की समीकरण निम्न हैं–

$$A_1x \quad B_1y \quad C_1 \quad = \quad 0 \qquad (1)$$

और $$A_2x \quad B_2y \quad C_2 \quad = 0 \qquad (2)$$

समीकरणों (1) और (2) से, हम निम्न समीकरण बना सकते हैं–

$$A_1x \quad B_1y \quad C_1 \quad k \; A_2x \quad B_2y \quad C_2 \quad = 0 \qquad (3)$$

जहाँ k एक स्वेछ अचर है, जिसे प्राचल (parameter) कहा जाता हैं। k के किसी भी मान के लिए, समीकरण (3) चरों x और y में प्रथम घात की समीकरण है। अत:, यह रेखाओं के एक कुल (family) को निरूपित करती है। k के किसी मान को लेकर इस कुल (या परिवार) के एक विशिष्ट सदस्य को प्राप्त किया जा सकता है। k के इस मान को अन्य प्रतिबंधों द्वारा ज्ञात किया जा सकता है।

उदाहरण 20 उस रेखा की समीकरण ज्ञात कीजिए, जो y-अक्ष के समांतर है तथा $x - 7y + 5 = 0$ और $3x + y - 7 = 0$ के प्रतिच्छेद बिंदु से होकर खींची गई है।

हल दी हुई रेखाओं के प्रतिच्छेद बिंदु से होकर जानेवाली रेखा की समीकरण निम्न रूप की होगी–

$$x \quad 7y \quad 5 \quad k(3x \quad y \quad 7) \quad = 0$$

अर्थात् $$(1 \quad 3k)x \quad (k \quad 7)y \quad 5 \quad 7k \quad = 0 \qquad (1)$$

यदि यह रेखा y-अक्ष के समांतर है, तो y का गुणांक शून्य होगा।

अर्थात्, $k - 7 = 0$ है, जिससे $k = 7$ प्राप्त होता है।

k के इस मान को समीकरण (1) में प्रतिस्थापित करने पर, हमें प्राप्त होता है–

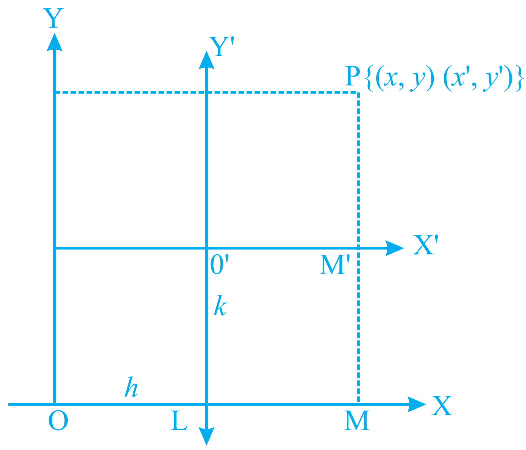
$22x - 44 = 0$, अर्थात् $x - 2 = 0$, जो वाँछित समीकरण है।

उदाहरण 10.4

1. उस रेखा की समीकरण ज्ञात कीजिए, जो रेखाओं $3x + 4y = 7$ और $x - y + 2 = 0$ के प्रतिच्छेद बिंदु से होकर जाती है और उसकी प्रवणता 5 है। (उत्तर $35x - 7y + 18 = 0$)
2. रेखाओं $x + 2y - 3 = 0$ और $4x - y + 7 = 0$ के प्रतिच्छेद बिंदु से होकर जाने उस रेखा की समीकरण ज्ञात कीजिए जो रेखा $5x + 4y - 20 = 0$ के समांतर है।
   (उत्तर $15x + 12y - 7 = 0$)
3. रेखाओं $2x + 3y - 4 = 0$ और $x - 5y = 7$ के प्रतिच्छोद बिंदु से होकर जाने वाली उस रेखा की समीकरण ज्ञात कीजिए, जिसका x-अंत: खंड -4 के बराबर है।
   (उत्तर $10x + 93y + 40 = 0$)
4. रेखाओं $5x - 3y = 1$ और $2x + 3y - 23 = 0$ के प्रतिच्छेद बिंदु से होकर जाने वाली उस रेखा की समीकरण ज्ञात कीजिए जो रेखा $5x - 3y - 1 = 0$ पर लंब है।
   (उत्तर $63x + 105y - 781 = 0$)

10.7. मूलबिंदु का स्थानांतरण

निर्देशांक अक्षों की एक निकाय (system) के संदर्भ में, बिंदुओं के एक समुच्चय के संगत एक समीकरण को, बिंदुओं के समुच्चय को एक उपयुक्त निर्देशांक पद्धति में इस प्रकार लेकर कि सभी ज्यामितीय गुण अपरिवर्तनीय रहें, सरलीकृत किया जा सकता है। एक ऐसा रूपांतरण है जिसमें नई अक्षों को प्रारंभिक अक्षों के समांतर बदल दिया जाता है तथा मूलबिंदु को नए बिंदु पर स्थानांतरित कर दिया जाता है। इस प्रकार के रूपांतरण को *अक्षों का स्थानांतरण* कहते हैं।



आकृति 10.21

तल के प्रत्येक बिंदु के निर्देशांक अक्षों के इस स्थानांतरण के अंतर्गत बदल जाते हैं। बिंदुओं के पुराने और नए निर्देशांकों के बीच संबंध ज्ञात होने पर, हम निर्देशांक अक्षों की नई पद्धति के पदों में एक विश्लेषणात्मक समस्या का अध्ययन कर सकते हैं।

यह देखने के लिए कि अक्षों के एक स्थानांतरण के अंतर्गत तल के एक बिंदु के निर्देशांक किस प्रकार बदलते हैं, आइए अक्षों OX और OY के संदर्भ में एक बिंदु $P(x, y)$ लें। मान लीजिए कि $O'X'$ और $O'Y'$ क्रमशः OX और OY के समांतर नई अक्ष हैं, जहाँ O' नया मूलबिंदु है। मान लीजिए कि पुरानी अक्षों के संदर्भ में O' के निर्देशांक (h, k) हैं, अर्थात् $OL = h$ और $LO' = k$ है। साथ ही, $OM = x$ और $MP = y$ है (देखिए आकृति 10.21)।

मान लीजिए कि $O'M' = x'$ और $M'P = y'$ क्रमशः, नई अक्षों $O'X'$ और $O'Y'$ के संदर्भ में, बिंदु P के भुज और कोटि हैं। आकृति 10.21 से, यह सरलता से देखा जा सकता है कि

$OM = OL + LM$, अर्थात् $x = h + x'$

और $MP = MM' + M'P$, अर्थात् $y = k + y'$

अतः, $x = x' + h$ और $y = y' + k$

ये ही सूत्र पुराने और नए निर्देशांकों में संबंध दर्शाते हैं।

उदाहरण 21 बिंदु $(3, -4)$ के नए निर्देशांक ज्ञात कीजिए, यदि मूलबिंदु को $(1, 2)$ पर स्थानांतरित कर दिया जाता है।

हल नए मूलबिंदु के निर्देशांक $h = 1$ और $k = 2$ हैं तथा बिंदु के प्रारंभिक निर्देशांक $x = 3$ और $y = -4$ हैं।

पुराने निर्देशांको (x, y) और नए निर्देशांकों (x', y') के बीच में रूपांतरण संबंध निम्न से दिए जाते हैं–

$x = x' + h$ अर्थात् $x' = x - h$

और $y = y' + k$ अर्थात् $y' = y - k$

मानों को प्रतिस्थापित करने पर, हम प्राप्त करते हैं–

$x' = 3 - 1 = 2$ और $y' = -4 - 2 = -6$

अतः, नई पद्धति में बिंदु (3, – 4) के निर्देशांक (2, – 6) हैं।

उदाहरण 22 सरल रेखा $2x - 3y + 5 = 0$ की रूपांतरित समीकरण ज्ञात कीजिए, यदि अक्षों के स्थानांतरण द्वारा मूलबिंदु को बिंदु (3, –1) पर स्थानांतरित कर दिया जाता है।

हल मान लीजिए कि एक बिंदु P के निर्देशांक (x, y) नई निर्देशांक अक्षों में (x', y') में बदल जाते हैं, जबकि मूलबिंदु $h = 3, k = -1$ हो जाता है। अतः, हम रूपांतरण सूत्रों को $x = x' + 3$ और $y = y' - 1$ के रूप में लिख सकते हैं। सरल रेखा की दी हुई समीकरण में इन मानों को प्रतिस्थापित करने पर, हमें प्राप्त होता है–

$$2(x' + 3) - 3(y' - 1) + 5 = 0$$

या
$$2x' - 3y' + 14 = 0$$

अतः, नई पद्धति में, सरल रेखा की समीकरण $2x - 3y + 14 = 0$

प्रश्नावली 10.5

1. निम्न में से प्रत्येक स्थिति में, बिंदुओं के नए निर्देशांक ज्ञात कीजिए, यदि अक्षों के एक स्थानांतरण द्वारा मूलबिंदु को बिंदु (–3, –2) पर स्थानांतरित कर दिया जाता है–

(i) (1, 1) (उत्तर (4, 3)) (ii) (0, 1) (उत्तर (3, 3))

(iii) (5, 0) (उत्तर (8, 2)) (iv) (–1, –2) (उत्तर (2, 0))

(v) (3, –5) (उत्तर (6, –3))

2. ज्ञात कीजिए कि मूलबिंदु को बिंदु (1, 1) पर स्थानांतरित करने पर निम्न समीकरण क्या हो जाती है;

(i) $x^2 + xy - 3y^2 - y + 2 = 0$ (उत्तर $x^2 - 3y^2 + xy + 3x - 6y + 1 = 0$)

(ii) $xy - y^2 - x + y = 0$ (उत्तर $xy - y^2 = 0$)

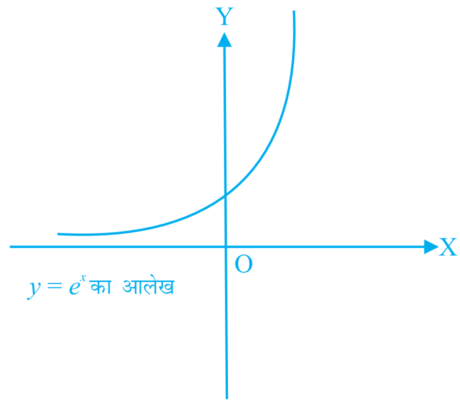
(iii) $xy - x - y + 1 = 0$ (उत्तर $xy = 0$)

अध्याय 13

13.5. चरघातांकीय और लघुगणकीय फलनों से संबद्ध सीमाएँ

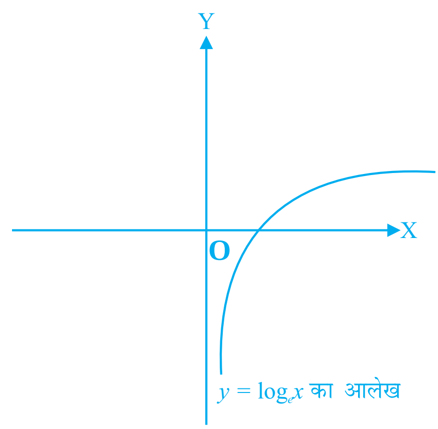
चरघातांकीय (exponential) और लघुगणकीय (logarithmic) फलनों से संबंध व्यंजकों की सीमाओं (limits) के मानों को निकालने की चर्चा करने से पहले, हम इन दोनों फलनों के प्राँत और परिसर बताते

हुए, इनका परिचय कराते हैं तथा इनके रफ़ आलेख बनाते हैं। एक महान स्विस गणितज्ञ लियोनार्ड ऑयलर (1707– 1783) ने संख्या e का परिचय दिया जिसका मान 2 और 3 के बीच स्थित है। यह संख्या चरघातांकीय फलन को परिभाषित करने के लिए उपयोगी है तथा इसे $f(x) = e^x, x \in \mathbf{R}$ के रूप में परिभाषित किया जाता है। इसका प्राँत $\mathbf{R}$ है और परिसर घनात्मक वास्तविक संख्याओं का समुच्चय है। चरघातांकीय फलन, अर्थात् $y = e^x$ का आलेख आकृति 13.11 में दिए अनुसार होता है।



आकृति 13.11

इसी प्रकार, लघुगणकीय फलन, जिसे $\log_e : \mathbf{R} \quad \mathbf{R}$ के रूप में व्यक्त किया जाता है, को $\log_e x \quad y$ द्वारा प्रदत्त किया जाता है, यदि और केवल यदि $e^y = x$ हो। इसका प्राँत $\mathbf{R}^+$ है, जो सभी धनात्मक वास्तविक संख्याओं का समुच्चय है तथा इसका परिसर $\mathbf{R}$ है। लघुगणकीय फलन $y = \log_e x$ का आलेख आकृति 13.12 में दर्शाया गया है।



आकृति 13.12

परिणाम $\lim\limits_{x \quad 0} \dfrac{e^x \quad 1}{x} \quad 1$ को सिद्ध करने के लिए, हम व्यंजक $\dfrac{e^x \quad 1}{x}$ से संबद्ध एक असमिका का उपयोग करते हैं, जो इस प्रकार है–

$$\frac{1}{1+|x|} \leq \frac{e^x - 1}{x} \leq 1 + (e-2)\,|x|,\ [-1, 1] \sim \{0\}$$ में सभी x के लिए सत्य है।

प्रमेय 6 सिद्ध कीजिए कि $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$ है।

उपपत्ति उपर्युक्त असमिका का उपयोग करने पर, हमें प्राप्त होता है–

$$\frac{1}{1 \quad |x|} \qquad \frac{e^x - 1}{x} \leq 1 + |x|\,(e-2),\ x \in [-1, 1] \sim \{0\}$$

साथ ही, $$\lim_{x\ \ 0}\frac{1}{1\ \ |x|} = \frac{1}{1\ \ \lim_{x\ \ 0}|x|}\ \ \frac{1}{1\ \ 0}\ \ 1$$

और $$\lim_{x\ \ 0}\ 1\ \ (e\ \ 2)|x| = 1\ \ (e\ \ 2)\lim_{x\ \ 0}|x|\ \ 1\ \ (e\ \ 2)0\ \ 1$$

अतः, सैंडविच प्रमेय द्वारा, हमें प्राप्त होता है–

$$\lim_{x\ \ 0}\frac{e^x\ \ 1}{x} = 1$$

प्रमेय 7 सिद्ध कीजिए कि $\lim_{x\to 0}\frac{\log_e(1+x)}{x}=1$

उपपत्ति मान लीजिए कि Let $\frac{\log_e(1+x)}{x}=y$ है तब,

$$\log_e(1\ \ x) = xy$$

$$1\ \ x\ \ e^{xy}$$

$$\frac{e^{xy}\ \ 1}{x}\ \ 1$$

या $$\frac{e^{xy}-1}{xy}\cdot y = 1$$

$$\lim_{xy\ \ 0}\frac{e^{xy}\ \ 1}{xy}\lim_{x\ \ 0}y = 1$$ (क्योंकि $x\to 0$ से $xy\to 0$ प्राप्त होता है)

$$\lim_{x\ \ 0}y\ \ 1$$ (क्योंकि $\lim_{xy\ \ 0}\frac{e^{xy}\ \ 1}{xy}\ \ 1$)

$$\lim_{x\ \ 0}\frac{\log_e(1\ \ x)}{x}\ \ 1$$

उदाहरण 5 अभिकलित कीजिए $\lim_{x\to 0}\frac{e^{3x}-1}{x}$

हल हमें प्राप्त है–

$$\lim_{x\ \ 0}\frac{e^{3x}\ \ 1}{x} = \lim_{3x\ \ 0}\frac{e^{3x}\ \ 1}{3x}\ \ 3$$

$$= 3\left(\lim_{y\to 0}\frac{e^y - 1}{y}\right), \quad \text{जहाँ } y = 3x$$

$$= 3.1 \quad 3$$

उदाहरण 6 अभिकलित कीजिए $\lim_{x\to 0}\frac{e^x - \sin x - 1}{x}$

हल हमें प्राप्त है– $\lim_{x\to 0}\frac{e^x - \sin x - 1}{x} = \lim_{x\to 0}\left[\frac{e^x - 1}{x} - \frac{\sin x}{x}\right]$

$$= \lim_{x \quad 0}\frac{e^x \quad 1}{x} \quad \lim_{x \quad 0}\frac{\sin x}{x} \quad 1 \quad 1 \quad 0$$

उदाहरण 7 अभिकलित कीजिए $\lim_{x\to 1}\frac{\log_e x}{x-1}$

हल $x = 1 + h$ रखिए। तब, $x \to 1 \Rightarrow h \to 0$ है। अतः,

$$\lim_{x \quad 1}\frac{\log_e x}{x \quad 1} \quad \lim_{h \quad 0}\frac{\log_e (1 \quad h)}{h} = 1 \text{ (क्योंकि } \lim_{x \quad 0}\frac{\log_e (1 \quad x)}{x} \quad 1 \text{ है)}$$

प्रश्नावली 13.2

निम्न सीमाओं के मान निकालिए, यदि उनका अस्तित्व है–

1. $\lim_{x\to 0}\frac{e^{4x} - 1}{x}$ (उत्तर 4)

2. $\lim_{x\to 0}\frac{e^{2+x} - e^2}{x}$ (उत्तर e^2)

3. $\lim_{x\to 5}\frac{e^x - e^5}{x - 5}$ (उत्तर e^5)

4. $\lim_{x\to 0}\frac{e^{\sin x} - 1}{x}$ (उत्तर 1)

5. $\lim_{x\to 3}\frac{e^x - e^3}{x - 3}$ (उत्तर e^3)

6. $\lim_{x\to 0}\frac{x(e^x - 1)}{1 - \cos x}$ (उत्तर 2)

7. $\lim_{x\to 0}\frac{\log_e(1 + 2x)}{x}$ (उत्तर 2)

8. $\lim_{x\to 0}\frac{\log(1 + x^3)}{\sin^3 x}$ (उत्तर 1)